

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı  
İkinci Aşama Sınavı

*Birinci Gün*  
*16 Aralık 2017*

---

1. 25 çeşit yemeğiyle ünlü bir  $A$  köyünde yapılacak bir düğün için 2017 kişinin yaşadığı komşu  $B$  köyünden düğüne bazı kişiler davet edilecektir.  $B$  köyündeki her bir kişi bu 25 çeşit yemekten en az birini sevmektedir ve her yemek için  $B$  köyünde o yemeği seven en az bir kişi bulunmaktadır.  $B$  köyünden düğüne davet edilen kişilerin kümesine, her bir yemek davet edilen en az bir kişi tarafından seviliyorsa, *uygun davetli listesi* diyelim. Her uygun davetli listesinden en az bir eleman içeren bir kümeye ise *kamber grubu* diyelim. Kendisi dışında hiçbir altkümesi kamber grubu olmayan herhangi bir kamber grubundaki herkesin sevdiği bir yemek bulunduğunu gösteriniz.

2. Karşılıklı kenarları paralel olmayan bir  $ABCD$  dörtgeninde  $AB$  ile  $CD$  doğruları  $X$  de kesişiyor.  $A$  merkezli  $r_1$  yarıçaplı çember ile  $D$  merkezli  $r_2$  yarıçaplı çember  $P$  ve  $Q$  da,  $B$  merkezli  $r_1$  yarıçaplı çember ile  $C$  merkezli  $r_2$  yarıçaplı çember  $R$  ve  $S$  de kesişiyor.

$$|XA| \cdot |XB| + r_1^2 = |XC| \cdot |XD| + r_2^2$$

ise,  $P, Q, R, S$  noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

3.  $n$  pozitif bir tam sayı olmak üzere  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  pozitif gerçel sayıları her  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  için  $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$  koşulunu sağlıyor.  $c_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}$  olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.