

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün

3 Aralık 2011

1. $n \geq 2$ ve $E = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. A_1, A_2, \dots, A_k ; E nin altkümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için, $A_i \cap A_j$, $A'_i \cap A_j$, $A_i \cap A'_j$ ve $A'_i \cap A'_j$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

[A , E nin bir altkümesi ise, E nin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

2. D , ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve E , $[CD]$ nin orta noktası olsun. E den BC doğrusuna çizilen dikme $[AC]$ kenarını $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$ koşulunu sağlayan bir F noktasında kesiyor. ADC üçgeninin çevrel çemberi de, $[AB]$ kenarını A dan farklı bir G noktasında kesiyor. AGF üçgeninin çevrel çemberine F noktasından çizilen teğetin BGE üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

3. $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.