

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün

29 Kasım 2008

1. Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC , AC ve AB kenarlarının orta noktaları, sırasıyla A_1 , B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1]$, $[HB_1]$ ve $[HC_1]$ ışınları, ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0 , B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O , H ve H_0 noktalarının doğrudan olduğunu gösteriniz.

2. a. $\frac{7^{p-1} - 1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

b. $\frac{11^{p-1} - 1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

3. $a + b + c = 1$ koşulunu sağlayan tüm a , b , c , pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2 - ab + b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2 - bc + c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2 - ca + a^2)} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.