

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu
XV. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
9 Aralık 2007

4. $k > 1$ bir tam sayı, $p = 6k + 1$ bir asal sayı ve $m = 2^p - 1$ olmak üzere,

$$\frac{2^{m-1} - 1}{127m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

5. $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi, BC kenarına D noktasında değiyor. ABD ve ADC üçgenlerinin iç merkezleri sırasıyla X ve Z olmak üzere, XZ ve AD doğruları K noktasında kesişiyor. XZ nin ABC nin çevrel çemberini kestiği noktalar U ve V ; $[UV]$ doğru parçasının orta noktası M ; AD nin ABC nin çevrel çemberini A dışında kestiği nokta Y olmak üzere, $|CY| = 2|MK|$ olduğunu gösteriniz.

6. n kentin bulunduğu bir ülkede, herhangi iki kent arasında, bu kentleri doğrudan birleştiren en çok bir yol bulunuyor. Farklı yolların sadece kentlerde kesiştiği bu ülkede, herhangi bir kentin tüm yolları kapansa bile, bu kent dışındaki her kentten başka her kente, gerekirse diğer kentlerden geçerek ulaşılabilir. Farklı A ve B kentleri verildiğinde, seçtiğimiz en çok k yolu istediğimiz gibi tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan yollar nasıl tek yönlü yapılırsa yapılsın, iki kenti doğrudan birleştiren herhangi bir l yolu için, A dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, l yolunu kullanmak ve herhangi bir kentten en çok bir kez geçmek üzere B ye ulaşabiliyorsak, A kenti B kentine k -yönlü bağlanabilir diyoruz. Her A kenti başka her B kentine k -yönlü bağlanabiliyorsa, k en az kaç olur?

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.