

XII. Ulusal Matematik Olimpiyatı
Birinci Aşama Sınavı

A

1. Köşeleri, yarıçapı 1 olan çemberin üstünde yer alan düzgün bir n -genin çevre uzunluğunun alanına oranı $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ise, n kaçtır?
- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8
2. $2x + 5y = xy - 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?
- a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 12
3. Elemanlarının hepsi 102 den küçük olan ve herhangi iki elemanının toplamını içermeyen bir pozitif tam sayı kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?
- a) 49 b) 50 c) 51 d) 54 e) 62
4. $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$ toplamının alabileceği en büyük değerle en küçük değer arasındaki fark nedir?
- a) 20 b) 15 c) 10 d) 5 e) 0

5. Kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgende $a \leq 2 \leq b \leq 3$ ise, bu üçgenin alanı en çok kaç olabilir?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri

6. n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2 + ab - 6b^2 = n$ eşitliğini sağlayan a, b tam sayıları bulunur?

a) 17 b) 19 c) 29 d) 31 e) 37

7. Farklı ağırlıktaki dört taş, iki kefeli bir teraziye en az kaç kez kullanarak hafiften ağıra doğru sıralanabilir?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

8. $x + y + z = 90$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü için $\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2}$ koşulunu sağlayan bir n pozitif tam sayısı vardır?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

9. Çevresinin uzunluğu π olan bir üçgenin dış bölgesinde kalan ve üçgene olan uzaklığı 1 i aşmayan noktaların oluşturduğu bölgenin alanı nedir?

a) 4π b) 3π c) $\frac{5\pi}{2}$ d) 2π e) $\frac{3\pi}{2}$

10. $a_1 = \sqrt{7}$ ve $i \geq 1$ için $b_i = \lfloor a_i \rfloor$, $a_{i+1} = \frac{1}{b_i - \lfloor b_i \rfloor}$ olsun. b_n nin 4 e bölünmesini sağlayan 2004 ten büyük en küçük n tam sayısı nedir?

a) 2005 b) 2006 c) 2007 d) 2008 e) Hiçbiri

11. 40 satır ve 7 sütundan oluşan bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Bu yazım sonucu, farklı herhangi iki satırda oluşan diziler birbirinden farklıysa, en çok kaç tane 1 kullanılmış olabilir?

a) 198 b) 128 c) 82 d) 40 e) Hiçbiri

12. x bir gerçel sayı olmak üzere $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ çarpımının alabileceği en küçük değer nedir?

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) -1 e) -2

13. Bir üçgenin iç açılarının tanjantları tam sayılarsa, bu sayıların toplamı kaçtır?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 9 e) Hiçbiri

14. $i, o, p, t, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere, $top^2 = iytotop$ ise, $y - i$ kaçtır?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) Hiçbiri

15. Dört 0, beş 1, ve bir 2 kullanarak on basamaklı kaç farklı tam sayı yazılabilir?

- a) 1260 b) 1134 c) 756 d) 630 e) Hiçbiri

16. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

17. Kenar uzunluğu 6 olan bir $ABCD$ karesinin $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde, $|CR| + |RT| + |TC| = 12$ olacak biçimde sırasıyla R ve T noktaları alınıyor. $\tan(\widehat{RAT})$ nedir?

a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

18. Asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanlarının kuvvetleri tek sayı olan pozitif tam sayıların oluşturduğu küme, en çok kaç ardışık tam sayı içerir?

a) 3 b) 7 c) 8 d) 10 e) 15

19. 1 ile başlayıp her adımda elimizdeki sayıya 1 ekleyerek veya çarpmaya göre tersinin negatifini alarak, sonlu sayıda adımda aşağıdakilerden hangisini elde edemeyiz?

a) -2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ d) 7 e) Hiçbiri

20. Tüm x gerçel sayıları için $x^2 \geq C \llbracket x \rrbracket (x - \llbracket x \rrbracket)$ eşitsizliğinin doğru olmasını sağlayan en büyük C gerçel sayısı nedir?

a) 0 b) 1 c) 4 d) 9 e) 25

- a) 20 b) 24 c) 25 d) 26 e) 31

- a) $x^3 - 3x^2 + 8x - 1$
b) $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
c) $x^3 + 14x^2 + 3x - 8$
d) $x^3 - 5x^2 + x + 1$
e) Hiçbiri

- a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

- a) -6 b) 2 c) 8 d) 11 e) Hiçbiri

- 25.** Bir ABC üçgeninde, A açısına ait iç açıortayın ayağı D olmak üzere, $[AC]$ kenarı üzerindeki E noktası, $|CE| = |CD|$ ve $|AE| = 6\sqrt{5}$; $[AB]$ ısnını üzerindeki F noktası da, $|DB| = |BF|$ ve $|AB| < |AF| = 8\sqrt{5}$ koşullarını sağlıyorsa, $|AD|$ nedir?

a) $10\sqrt{5}$ b) 8 c) $4\sqrt{15}$ d) $7\sqrt{5}$ e) Hiçbiri

- 26.** $2005^{2003^{2004}+3}$ sayısı 3 tabanına göre yazıldığında son iki basamak ne olur?

a) 21 b) 01 c) 11 d) 02 e) 22

- 27.** İkisinde 1, sekizinde 2, on ikisinde 3, dördünde 4 ve beşinde 5 yazılı otuz bir taştan otuzu herhangi iki satırdaki sayıların toplamı eşit ve herhangi iki sütundaki sayıların toplamı eşit olacak biçimde 5×6 bir satranç tahtasına yerleştirilmişse, kullanılmayan taştaki sayı nedir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 28.** x, y gerçel sayıları $4x^2 + 9y^2 = 8$ eşitliğini sağlıyorsa, $8x^2 + 9xy + 18y^2 + 2x + 3y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 23 b) 26 c) 29 d) 31 e) 35

- 29.** $ABCD$ kirişler dörtgeninin AC ve BD köşegenleri M noktasında kesişiyor. $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $m(\widehat{AMB}) = 60^\circ$ ise, dörtgenin çevrel çemberinin yarı çapının uzunluğu nedir?

a) $5\sqrt{3}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ c) 6 d) 4 e) $\sqrt{34}$

- 30.** $p^2 + 23$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 14 olacak şekilde kaç p asal sayısı bulunur?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

- 31.** n tam sayısının kaç farklı değeri için, düzlemde her biri kendi dışında-kilerin tam olarak 2004 ü ile kesişen farklı n doğru bulunabilir?

a) 12 b) 11 c) 9 d) 6 e) 1

- 32.** a, b, c, d farklı gerçel sayılar olmak üzere, a ve b , $x^2 - 2cx - 5d = 0$ denkleminin, c ve d ise, $x^2 - 2ax - 5b = 0$ denkleminin kökleriye, $a + b + c + d$ nedir?

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

- 33.** $|AB| = 9$, $|CD| = 5$ ve $BC \parallel AD$ koşullarını sağlayan $ABCD$ yamuğunun D açısına ait iç açıortay, A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla M ve N noktalarında; B açısının iç açıortayı ise, yine A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla L ve K noktalarında kesiyor. K noktası $[AD]$ üzerinde ve $\frac{|LM|}{|KN|} = \frac{3}{7}$ ise, $\frac{|MN|}{|KL|}$ nedir?

- a) $\frac{62}{63}$ b) $\frac{27}{35}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{24}{63}$

- 34.** n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için $5n^{11} - 2n^5 - 3n$ sayısını bölen kaç tane pozitif tam sayı vardır?

- a) 2 b) 5 c) 6 d) 12 e) 18

- 35.** Bir çember üzerine, her biri saat yönünde kendisinden sonra gelen iki sayının farkının mutlak değerine eşit ve hepsinin toplamı 94 olacak biçimde n tane tam sayı yerleştirilmesini olanaklı kılan en büyük n sayısı nedir?

- a) 188 b) 186 c) 141 d) 100 e) 47

- 36.** f fonksiyonu, her $x \neq 1$ gerçel sayısı için, $f(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$ eşitliğini sağlıyorsa, $f(-1)$ nedir?

- a) -1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{4}$ e) Hiçbiri