



TÜBİTAK

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI**

**20. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2012
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI**

Soru kitapçığı türü

A

15 Nisan 2012 Pazar, 13.00-15.30

ÖĞRENCİNİN ADI SOYADI :

T.C. KİMLİK NO. :

OKULU / SINIFI :

SINAVA GİRDİĞİ İL :

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 36 sorudan oluşmaktadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız.
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu tamamen karalayarak işaretleyiniz.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürcektir.**
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal, pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar, ya da karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama yapmak için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday bir sorunun yanlış olduğundan emin ise, itiraz için sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında (<http://www.tubitak.gov.tr>) yayınlandıktan sonra 5 iş günü içerisinde kanıtları ile birlikte TÜBİTAK'a başvurmalıdır. Bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayların sorulara itiraz hakkı vardır; üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2012 Birinci Aşama Sınavı'nda sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukukî sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat komitesi bu tür durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

BAŞARILAR DİLERİZ.

NOT: Metin içinde kullanılan bazı gösterimlerin anlamları aşağıda verilmiştir.

AB	A ve B noktalarından geçen doğru
$[AB]$	A ve B noktalarını birleştiren doğru parçası
$ AB $	$[AB]$ nin uzunluğu
$m(\widehat{ABC})$	ABC açısının ölçüsü

1. Yüksekliklerinin uzunlukları 3, 4 ve 6 birim olan bir üçgeninin çevre uzunluğu kaç birimdir?

a) $12\sqrt{\frac{3}{5}}$ b) $16\sqrt{\frac{3}{5}}$ c) $20\sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $24\sqrt{\frac{3}{5}}$ e) Hiçbiri

2. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $2012^n + m^2$ sayısının 11 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

a) 55 b) 46 c) 43 d) 39 e) 37

3. Aşağıdaki x değerlerinden hangisi $\sqrt[3]{6 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{3}$ eşitliğini sağlar?

a) 27 b) 32 c) 45 d) 52 e) 63

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin tüm a elemanları için $f(f(a)) = a$ koşulunu sağlayan kaç $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu vardır?

a) 1 b) 106 c) 127 d) 232 e) Hiçbiri

9. $[AB]$ çaplı çemberin $[CD]$ kirişi $[AB]$ ye diktir. M ve N sırasıyla, $[BC]$ ve $[AD]$ nin orta noktaları olmak üzere, $|BC| = 6$ ve $|AD| = 2\sqrt{3}$ ise, $|MN|$ nedir?

a) 4 b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{21}$ d) 5 e) Hiçbiri

10. n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

11. $x^3 + 2 = 3y$, $y^3 + 2 = 3z$, $z^3 + 2 = 3w$, $w^3 + 2 = 3x$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z, w) gerçel sayı dördlüsü vardır?

a) 8 b) 5 c) 3 d) 1 e) Hiçbiri

12. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen kaç altkümesi vardır?

a) 596 b) 648 c) 679 d) 773 e) 812

13. Köşeleri, düzlemdeki herhangi üçü doğrudan olmayan 20 noktadan oluşan bir kümeye ait olan en çok kaç geniş açılı üçgen bulunabilir?

- a) 6 b) 20 c) $2\binom{10}{3}$ d) $3\binom{10}{3}$ e) $\binom{20}{3}$

14. n pozitif tam sayı olmak üzere, $(2n - 1)^{502} + (2n + 1)^{502} + (2n + 3)^{502}$ sayısının 2012 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

- a) 3 b) 1510 c) 1511 d) 1514 e) Hiçbiri

15. a gerçel sayısının, $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + a = 0$ denkleminin dört farklı gerçel kökü olmasını sağlayan tüm değerlerinin kümesi nedir?

- a) $(-9, 2)$ b) $(-9, 0)$ c) $[-9, 0)$ d) $[-8, 1)$ e) $(-8, 1)$

16. 8×8 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 ve -1 sayılarından biri yazılmıştır. En az dört satırın her birindeki sayıların toplamı pozitif ise, üzerlerindeki sayıların toplamı -3 ten küçük olan en çok kaç sütun olabilir?

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

- 21.** $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ ve $|CA| = 7$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait açıortayı $[BC]$ kenarını D noktasında kesiyor. A dan geçen ve BC ye D de teğet olan çember ise, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını sırasıyla, P ve Q noktalarında kesiyor. AD ve PQ doğruları T noktasında kesişiyorsa, $|AT|/|TD|$ nedir?

- a) $\frac{7}{5}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{7}{2}$ e) 4

- 22.** $4mn(m+n-1) = (m^2+1)(n^2+1)$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 23.** a, b, c gerçel sayıları $x^3 - 3x + 1 = 0$ denkleminin farklı kökleri ise, $a^8 + b^8 + c^8$ nedir?

- a) 156 b) 171 c) 180 d) 186 e) 201

- 24.** Bir yüzleri siyah ve diğer yüzleri beyaz olan 2012 tane tavla pulu bir doğru boyunca ve üste gelen yüzleri dönüşümlü olarak siyah ve beyaz olacak biçimde dizilmiştir. Her hamlede iki pul seçip bunları ve bu pulların arasında kalan tüm pulları ters çeviriyoruz. Bütün pulların üste gelen yüzlerinin aynı renkte olmasını en az kaç hamlede sağlayabiliriz?

- a) 1006 b) 1204 c) 1340 d) 2011 e) Hiçbiri

- 25.** Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarının M orta noktası, B köşesine ait yüksekliğinin H ayağı ile C köşesi arasındadır. $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{MBC})$, $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ ve $|HM| = 2\sqrt{3}$ ise, $|AC|$ nedir?

a) 6 b) $5\sqrt{2}$ c) 8 d) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ e) 10

- 26.** 100 den küçük kaç asal sayı ardışık pozitif tam sayıların karelerinin toplamı olarak yazılabilir?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

- 27.** Tüm x gerçel sayıları için, $\sin x \cos x \leq C (\sin^6 x + \cos^6 x)$ olmasını sağlayan en küçük C gerçel sayısı nedir?

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) Hiçbiri

- 28.** Başlangıçta üç kutuda sırasıyla, m , n ve k tane taş bulunuyor. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu istediği bir kutudan en az bir tane olmak üzere, istediği sayıda taş alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m, n, k) = (1, 2012, 2014)$, $(2011, 2011, 2012)$, $(2011, 2012, 2013)$, $(2011, 2012, 2014)$, $(2011, 2013, 2013)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan en az kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

- 29.** Dar açılı bir ABC üçgeninin sırasıyla, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde yer alan D ve E noktaları için, AD ve BE doğruları F noktasında kesişiyor. $|AF| = |CD| = 2|BF| = 2|CE|$ ve $\text{Alan}(ABF) = \text{Alan}(DEC)$ ise, $\text{Alan}(AFC)/\text{Alan}(BFC)$ nedir?

a) 4 b) $2\sqrt{2}$ c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) 1

- 30.** $x^3 + y^3 = x^2yz + xy^2z + 2$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

- 31.** $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ fonksiyonu tüm m, n tam sayıları için,

$$m + f(m + f(n + f(m))) = n + f(m)$$

ve $f(6) = 6$ koşullarını sağlıyorsa, $f(2012)$ nedir?

a) -2010 b) -2000 c) 2000 d) 2010 e) 2012

- 32.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sayılarının $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ permütasyonlarından kaçını için, $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_{10} - 10| = 4$ olur?

a) 60 b) 52 c) 50 d) 44 e) 36

- 33.** $|AB| = 2|BC|$ olan $ABCD A'B'C'D'$ dikdörtgenler prizmasında $[BB']$ ayrıtı üstündeki E noktası $|EB'| = 6|EB|$ koşulunu sağlıyor. AEC ve $A'EC'$ üçgenlerinde E ye ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, F ve F' olmak üzere, $m(\angle FEF') = 60^\circ$ ise, $|BC'|/|BE|$ nedir?

- a) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ b) $\sqrt{\frac{15}{2}}$ c) $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ d) $5\sqrt{\frac{5}{3}}$ e) Hiçbiri

- 34.** $n \geq 2012$ olmak üzere, $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$ sayısının 10 ile bölünmesini sağlayan en küçük n tam sayısı nedir?

- a) 2012 b) 2013 c) 2014 d) 2015 e) 2016

- 35.** $x^3 + y^4 = x^2y$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) pozitif gerçel sayı ikililerinde x in aldığı en büyük değer A ve y nin aldığı en büyük değer B ise, A/B nedir?

- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{512}{729}$ c) $\frac{729}{1024}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{243}{256}$

- 36.** Her kutuda en çok 20 taş olmak koşuluyla k tane taş 2012 kutuya nasıl dağıtılmış olursa olsun, bu kutulardan bazılarını seçip, seçtiğimiz kutulardan istediklerimizden istediğimiz sayıda taş atarak, seçtiğimiz kutularda toplam olarak en az 100 tane ve bu kutuların her birinde eşit sayıda taş kalmasını sağlayabiliyorsak, k en az kaç olabilir?

- a) 500 b) 450 c) 420 d) 349 e) 296