

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı  
İkinci Aşama Sınavı

*Birinci Gün  
24 Kasım 2012*

1. Her  $n$  pozitif tam sayısı için  $P(n!) = |P(n)|!$  koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı  $P(x)$  polinomlarını bulunuz.

2.  $ABC$ ,  $|AB| = |AC|$  koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve  $D$ ,  $A$  ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere,  $ADC$  üçgeninin iç bölgesindeki bir  $P$  noktası  $m(\widehat{APB}) > 90^\circ$  ve  $m(\widehat{PBD}) + m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$  koşullarını sağlıyor.

$CP \cap AD = \{Q\}$  ve  $BP \cap AD = \{R\}$  olsun.  $[AB]$  üstünde yer alan bir  $T$  noktası ile  $[AP]$  üstünde ve  $[AP]$  dışında yer alan bir  $S$  noktası,  $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$  ve  $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$  koşullarını sağlıyorsa,  $|TR| = |RS|$  olduğunu gösteriniz.

3. Tüm  $x, y$  gerçel sayıları için,

i.  $f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$  ve

ii.  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

koşullarını sağlayan bütün  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonlarını belirleyiniz.

---

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.  
Her soru 7 puan değerindedir.*