

18. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

23 Kasım 2013

1. $x + y + z = 0$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ koşullarını sağlayan x, y, z gerçel sayıları için,

$$|(x - y)(y - z)(z - x)|$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

2. $p^4 + 2p + q^4 + q^2 = r^2 + 4q^3 + 1$ eşitliğini sağlayan tüm (p, q, r) asal sayı üçlülerini bulunuz.

3. $|AC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına sırasıyla, D ve E noktalarında teğet olan bir çember, ABC üçgeninin çevrel çemberini K ve L noktalarında kesiyor. Sırasıyla, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde yer alan X ve Y noktaları

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|BD| + |CE|} \quad \text{ve} \quad \frac{|AY|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BD| + |CE|}$$

eşitliklerini sağlıyorsa, XY, BC, KL doğrularının noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

4. Aybike bir çemberin çevresine istediği tek sayıda kutuyu yerleştirip, 2013 boncuğu bu kutulardan bazılarına istediği biçimde dağıtıyor. Sonra Berk bu kutulardan birini seçiyor. Daha sonra da Aybike, Berk'in seçmediği kutulardan yarısını herhangi ikisi ardışık olmayacak biçimde seçiyor. Aybike seçtiği kutularda k tane boncuk olmasını garantileyebiliyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*