

16. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

3 Aralık 2011

1. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için,

$$1 \leq \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{9}{8}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ nin orta noktası D ve D den AC doğrusuna inilen dikmenin ayağı E dir. BE doğrusu ABD üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. DE ve AF doğrularının kesişim noktası G ise, $|DG| = |GE|$ olduğunu kanıtlayınız.

3. $m < n$ pozitif tam sayılar olmak üzere, $p = \frac{n^2 + m^2}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ olsun.

a. p nin asal sayı olmasını sağlayan üç tane (m, n) pozitif tam sayı ikilisi bulunuz.

b. p bir asal sayı ise, $p \equiv 1 \pmod{8}$ olduğunu gösteriniz.

4. Öğretmen sınıfa 20 tane matematik ve 11 tane fizik sorusundan oluşan bir liste vererek, her öğrencinin tam olarak 1 matematik ve 1 fizik sorusu seçip çözmesini istiyor. Aynı soru ikilisi birden fazla öğrenci tarafından seçilmemişse ve her öğrencinin seçtiği iki sorudan en az biri kendisinden başka en çok bir öğrenci tarafından seçilmişse, bu sınıfta en çok kaç öğrenci olabileceğini belirleyiniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*