

17. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

24 Kasım 2012

1. x, y tam sayılar ve p bir asal sayı olmak üzere,

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p$$

eşitliğini sağlayan tüm (x, y, p) üçlülerini bulunuz.

2. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin köşegenleri birbirine dik olarak E noktasında kesişiyor. $[AD]$ kenarı üstünde yer alan A dan farklı bir P noktası $|PE| = |EC|$ koşulunu sağlıyor. BCD üçgeninin çevrel çemberi de $[AD]$ yi yine A dan farklı bir Q noktasında kesiyor. A dan geçen ve EP doğrusuna P noktasında teğet olan çember ise, $[AC]$ doğru parçasını R noktasında kesiyor. B, R, Q noktaları doğrudan ise, $s(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ olduğunu gösteriniz.

3. $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a}{a^2 + b^3 + c^3} + \frac{b}{a^3 + b^2 + c^3} + \frac{c}{a^3 + b^3 + c^2} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. İçlerinde çeşitli renklerde toplar bulunan 2012 torbayı k kutuya

i. herhangi bir kutudaki tüm torbalar aynı renkte bir top içerecek veya

ii. herhangi bir kutudaki her torba, bu kutudaki diğer torbalardan hiçbirinin içermediği renkte bir top içerecek

biçimde yerleştirmek istiyoruz. Torbalardaki topların sayıları ve renkleri ne olursa olsun, böyle bir yerleştirmeyi olanaklı kılan en küçük k sayısını belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.