

XII. Ulusal Matematik Olimpiyatı
Birinci Aşama Sınavı

B

XII. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **B**

1. Kenar uzunlukları a, b, c olan bir üçgende $a \leq 2 \leq b \leq 3$ ise, bu üçgenin alanı en çok kaç olabilir?
- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) Hiçbiri
2. n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2 + ab - 6b^2 = n$ eşitliğini sağlayan a, b tam sayıları bulunur?
- a) 37 b) 31 c) 29 d) 19 e) 17
3. Farklı ağırlıktaki dört taş, iki kefele bir teraziye en az kaç kez kullanarak hafiften ağıra doğru sıralanabilir?
- a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4
4. $x + y + z = 90$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü için $\frac{x}{n} = \frac{y}{n+1} = \frac{z}{n+2}$ koşulunu sağlayan bir n pozitif tam sayısı vardır?
- a) 9 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

XII. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **B**

5. Köşeleri, yarıçapı 1 olan çemberin üstünde yer alan düzgün bir n -genin çevre uzunluğunun alanına oranı $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ise, n kaçtır?
- a) 8 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3
6. $2x + 5y = xy - 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?
- a) 12 b) 6 c) 4 d) 3 e) 1
7. Elemanlarının hepsi 102 den küçük olan ve herhangi iki elemanının toplamını içermeyen bir pozitif tam sayı kümesinin en çok kaç elemanı olabilir?
- a) 62 b) 54 c) 51 d) 50 e) 49
8. $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$ toplamının alabileceği en büyük değerle en küçük değer arasındaki fark nedir?
- a) 0 b) 5 c) 10 d) 15 e) 20

XII. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **B**

9. Bir üçgenin iç açılarının tanjantları tam sayılarsa, bu sayıların toplamı kaçtır?

- a) 9 b) 6 c) 5 d) 4 e) Hiçbiri

10. $i, o, p, t, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ olmak üzere, $top^2 = iytotop$ ise, $y - i$ kaçtır?

- a) 5 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

11. Dört 0, beş 1, ve bir 2 kullanarak on basamaklı kaç farklı tam sayı yazılabilir?

- a) 630 b) 756 c) 1134 d) 1260 e) Hiçbiri

12. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

13. Çevresinin uzunluğu π olan bir üçgenin dış bölgesinde kalan ve üçgene olan uzaklığı 1 i aşmayan noktaların oluşturduğu bölgenin alanı nedir?

- a) $\frac{3\pi}{2}$ b) 2π c) $\frac{5\pi}{2}$ d) 3π e) 4π

14. $a_1 = \sqrt{7}$ ve $i \geq 1$ için $b_i = \lfloor a_i \rfloor$, $a_{i+1} = \frac{1}{b_i - \lfloor b_i \rfloor}$ olsun. b_n nin 4 e bölünmesini sağlayan 2004 ten büyük en küçük n tam sayısı nedir?

- a) 2008 b) 2007 c) 2006 d) 2005 e) Hiçbiri

15. 40 satır ve 7 sütundan oluşan bir satranç tahtasının her birim karesine 0 ve 1 sayılarından birini yazıyoruz. Bu yazım sonucu, farklı herhangi iki satırda oluşan diziler birbirinden farklıysa, en çok kaç tane 1 kullanılmış olabilir?

- a) 40 b) 82 c) 128 d) 198 e) Hiçbiri

16. x bir gerçel sayı olmak üzere $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ çarpımının alabileceği en küçük değer nedir?

- a) -2 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{4}$

- 21.** Kenar uzunluğu 6 olan bir $ABCD$ karesinin $[BC]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde, $|CR| + |RT| + |TC| = 12$ olacak biçimde sırasıyla R ve T noktaları alınıyor. $\tan(\widehat{RAT})$ nedir?

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

- 22.** Asal çarpanlarına ayrıldığında tüm asal çarpanlarının kuvvetleri tek sayı olan pozitif tam sayıların oluşturduğu küme, en çok kaç ardışık tam sayı içerir?

a) 15 b) 10 c) 8 d) 7 e) 3

- 23.** 1 ile başlayıp her adımda elimizdeki sayıya 1 ekleyerek veya çarpmaya göre tersinin negatifini alarak, sonlu sayıda adımda aşağıdakilerden hangisini elde edemeyiz?

a) 7 b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) -2 e) Hiçbiri

- 24.** Tüm x gerçel sayıları için $x^2 \geq C \llbracket x \rrbracket (x - \llbracket x \rrbracket)$ eşitsizliğinin doğru olmasını sağlayan en büyük C gerçel sayısı nedir?

a) 25 b) 9 c) 4 d) 1 e) 0

- 25.** $ABCD$ kirişler dörtgeninin AC ve BD köşegenleri M noktasında kesişiyor. $|AB| = 5$, $|CD| = 3$, $m(\widehat{AMB}) = 60^\circ$ ise, dörtgenin çevrel çemberinin yarı çapının uzunluğu nedir?

a) $\sqrt{34}$ b) 4 c) 6 d) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ e) $5\sqrt{3}$

- 26.** $p^2 + 23$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 14 olacak şekilde kaç p asal sayısı bulunur?

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

- 27.** n tam sayısının kaç farklı değeri için, düzlemde her biri kendi dışında-kilerin tam olarak 2004 ü ile kesişen farklı n doğru bulunabilir?

a) 1 b) 6 c) 9 d) 11 e) 12

- 28.** a, b, c, d farklı gerçel sayılar olmak üzere, a ve b , $x^2 - 2cx - 5d = 0$ denkleminin, c ve d ise, $x^2 - 2ax - 5b = 0$ denkleminin kökleriye, $a + b + c + d$ nedir?

a) 30 b) 25 c) 20 d) 15 e) 10

29. Bir ABC üçgeninde, A açısına ait iç açıortayın ayağı D olmak üzere, $[AC]$ kenarı üzerindeki E noktası, $|CE| = |CD|$ ve $|AE| = 6\sqrt{5}$; $[AB]$ ını üzerindeki F noktası da, $|DB| = |BF|$ ve $|AB| < |AF| = 8\sqrt{5}$ koşullarını sağlıyorsa, $|AD|$ nedir?

- a) $7\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{15}$ c) 8 d) $10\sqrt{5}$ e) Hiçbiri

30. $2005^{2003^{2004}+3}$ sayısı 3 tabanına göre yazıldığında son iki basamak ne olur?

- a) 22 b) 02 c) 11 d) 01 e) 21

31. İkisinde 1, sekizinde 2, on ikisinde 3, dördünde 4 ve beşinde 5 yazılı otuz bir taştan otuzu herhangi iki satırdaki sayıların toplamı eşit ve herhangi iki sütundaki sayıların toplamı eşit olacak biçimde 5×6 bir satranç tahtasına yerleştirilmişse, kullanılmayan taştaki sayı nedir?

- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

32. x, y gerçel sayıları $4x^2 + 9y^2 = 8$ eşitliğini sağlıyorsa, $8x^2 + 9xy + 18y^2 + 2x + 3y$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

- a) 35 b) 31 c) 29 d) 26 e) 23

- 33.** $|AB| = 9$, $|CD| = 5$ ve $BC \parallel AD$ koşullarını sağlayan $ABCD$ yamuğunun D açısına ait iç açıortay, A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla M ve N noktalarında; B açısının iç açıortayı ise, yine A ve C açılarının iç açıortaylarını sırasıyla L ve K noktalarında kesiyor. K noktası $[AD]$ üzerinde ve $\frac{|LM|}{|KN|} = \frac{3}{7}$ ise, $\frac{|MN|}{|KL|}$ nedir?

- a) $\frac{24}{63}$ b) $\frac{5}{21}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{27}{35}$ e) $\frac{62}{63}$

- 34.** n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için $5n^{11} - 2n^5 - 3n$ sayısını bölen kaç tane pozitif tam sayı vardır?

- a) 18 b) 12 c) 6 d) 5 e) 2

- 35.** Bir çember üzerine, her biri saat yönünde kendisinden sonra gelen iki sayının farkının mutlak değerine eşit ve hepsinin toplamı 94 olacak biçimde n tane tam sayı yerleştirilmesini olanaklı kılan en büyük n sayısı nedir?

- a) 47 b) 100 c) 141 d) 186 e) 188

- 36.** f fonksiyonu, her $x \neq 1$ gerçel sayısı için, $f(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = x^3$ eşitliğini sağlıyorsa, $f(-1)$ nedir?

- a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) -1 e) Hiçbiri